



ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับกราฟ Basic Knowledge of Graph Theory

วงศกร เจริญพาณิชเสรี^{1*}

¹อาจารย์ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะเทคโนโลยีสารสนเทศ มหาวิทยาลัยรังสิต จังหวัดปทุมธานี 12000

บทคัดย่อ

ในบทความนี้ กราฟไม่ได้หมายถึงแผนภูมิแท่ง แผนภูมิวงกลม หรือสมการพาราโบลา แต่กราฟคือรูปที่ประกอบด้วยจุดและเส้นโดยกราฟจะอยู่ในลักษณะของภาพ โดยใช้จุดแทนจุดยอดแต่ละจุด และลากเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดถ้าจุดยอดทั้งสองนั้นมีความสัมพันธ์กัน ประโยชน์อย่างหนึ่งของกราฟ คือสามารถใช้เป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ซึ่งทำให้ปัญหาต่าง ๆ ง่ายขึ้น ยกตัวอย่างเช่น ปัญหะสะพานทั้ง 7 แห่งเมืองโكونิกส์เบิร์ก และปัญหา 4 สี ปัญหะสะพานทั้ง 7 แห่งเมืองโكونิกส์เบิร์ก คือ การหารือเดินให้ทั้งเมืองโดยที่เดินผ่านทุกสะพานแค่เพียงครั้งเดียวเท่านั้น โดยเลออนาร์ด ออยเลอร์ วาดกราฟเพื่อเป็นแบบจำลองของทั้ง 7 สะพาน และพิสูจน์ว่าไม่มีวิธีเดินดังกล่าว การพิสูจน์นี้จัดว่าเป็นบทความแรกในประวัติศาสตร์ของทฤษฎีกราฟ ปัญหา 4 สี คือ การหาร่ว่าจริงหรือไม่ที่สามารถระบายสีแผนที่ โดยใช้สีไม่เกิน 4 สีเพื่อที่จะให้พื้นที่ที่อยู่ติดกันมีสีต่างกัน ปัญหานี้จัดได้ว่าเป็นปัญหาที่ได้รับการสนใจมากที่สุดในทางทฤษฎีกราฟ

Abstract

In this article, a graph is neither a bar chart, a pie chart, nor a parabola, but a figure consisting of points and lines. A graph is presented in a form of picture in which each point represents a vertex and a line represents an edge when two vertices have a relation. One advantage of graph is to be used as mathematical model which can simplify several problems; for example, Seven Bridges of Königsberg and Four colors problems. The Seven Bridges of Königsberg problem concerns with finding a walk through the city that would cross each bridge only once. Leonhard Euler had drawn a graph representing the seven bridges and proved that it is impossible to find the walk. This proof has been the first paper in the history of graph theory. In the four color case, the problem is whether a map could be colored using a maximum of four colors, but no two adjacent regions have the same color. This problem is one of the most famous theorems in the field of graph theory.

คำสำคัญ :กราฟ ทฤษฎีกราฟ จุดยอด เส้นเชื่อม

Keywords :Graph, Graph Theory, Vertex, Edge

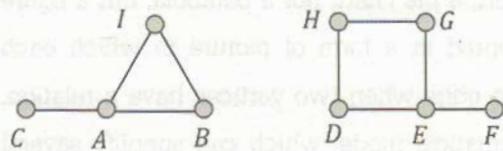
* ผู้นิพนธ์ประธานงานประชุมนิยอเล็กทรอนิกส์ Wongsakorn.c@rsu.ac.th โทร. 08 9675 4549

1. บทนำ

กราฟ คือ รูปที่ประกอบด้วยจุดยอดและเส้นเชื่อมระหว่าง 2 จุดที่มีความลับพันธ์กัน ซึ่งนิยมนำมาใช้เป็นโน๊ตทางคณิตศาสตร์เพื่อที่จะทำให้สามารถศึกษาปัญหานั้น ๆ ได้ง่ายขึ้น โดยในบทความนี้จะเน้นไปที่วิธีการสร้างกราฟแทนปัญหาต่าง ๆ เพื่อให้สามารถแก้ปัญหาได้ง่ายขึ้น ตัวอย่าง 1 และตัวอย่าง 2 เป็นการนำกราฟมาประยุกต์ใช้ในโจทย์ปัญหาเพื่อให้มองภาพรวมและแก้ปัญหาได้ง่ายขึ้น

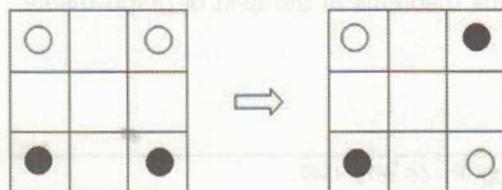
ตัวอย่างที่ 1 ในประเทศไทยมี 9 เมือง คือ เมือง A, B, C, D, E, F, G, H และ I มีถนนเชื่อมระหว่างเมืองต่อไปนี้ A-C, I-B, I-A, A-B, G-E, G-H, E-F, D-E และ H-D จงหาว่ามีเส้นทางเชื่อมระหว่างเมือง C-D และ D-F หรือไม่

เริ่มต้นโดยวิเคราะห์กราฟที่มีจุดยอด 9 จุด ให้แต่ละจุดแทนเมืองแต่ละเมือง แล้วลากเส้นเชื่อมเมืองที่มีถนนเชื่อมถึงกัน



พบว่า ไม่มีเส้นทางเชื่อมระหว่างเมือง C และเมือง D แต่มีเส้นทางเชื่อมระหว่างเมือง D และเมือง F

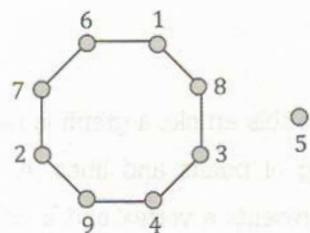
ตัวอย่างที่ 2 มีม้ามากruk ลีคำและสีขาวบนกระดานดังรูปซ้ายมือ ถ้าม่วงวิธีการเดินม้าให้อยู่ในตำแหน่งดังรูปขวามือหรือไม่



เริ่มต้นโดยการกำหนดชื่อเพื่อเรียกทั้งเก้าช่องของตาราง โดยเรียกว่าช่อง 1, 2, 3, ..., 9 ดังรูป

1	2	3
4	5	6
7	8	9

เริ่มทำการวิเคราะห์โดยวิเคราะห์จุดยอด 9 จุด โดยจุดยอดแทนตารางแต่ละช่อง ทำการลากเส้นเชื่อมระหว่างจุด ถ้าหังส่องจุดนั้นแทนช่องในตารางที่มีความสามารถเดินได้ในหนึ่งครั้ง นั่นคือ มีเส้นเชื่อมระหว่างจุด 1 กับจุด 8, จุด 8 กับจุด 3, จุด 3 กับจุด 4, จุด 4 กับจุด 9, จุด 9 กับจุด 2, จุด 2 กับจุด 7, จุด 7 กับจุด 6 และจุด 6 กับจุด 1



สังเกตว่าเมื่อเริ่มต้นม้าสีขาวอยู่ตำแหน่งที่ 1 และ 3 ส่วนม้าสีดำอยู่ที่ 7 และ 9 ซึ่งถ้าพิจารณาจากกราฟ พบว่า จะอยู่ในลักษณะที่ม้าสีขาวอยู่ติดกับม้าสีขาว แต่ลักษณะม้าสูตรท้ายที่เราต้องการมีม้าสีขาวอยู่ที่ตำแหน่ง 1 และ 9 ส่วนม้าที่สีดำอยู่ที่ตำแหน่ง 3 และ 7 ซึ่งอยู่ลับกัน เนื่องจากการเดินม้าแต่ละครั้ง คือ การเดินจากจุดยอดหนึ่งในกราฟไปยังจุดยอดที่อยู่ติดกันเท่านั้น ดังนั้น จึงเป็นไปไม่ได้ที่ม้าสีขาวและม้าสีดำจะลับตำแหน่งกัน



2. บทนิยาม

กราฟประกอบด้วยจุดยอด (Vertex, Vertices) และเส้นเชื่อม (Edge, Edges) ซึ่งจะเชื่อมจุดยอด 2 จุด ถ้ามีเส้นเชื่อมจุดยอด x และ y จุดยอด y เรากล่าวว่า x และ y อยู่ปะติดกัน (Adjacent) และเรียกว่าจุดที่อยู่บนปลายเส้นเชื่อมว่า เป็นจุดยอดที่อยู่ติดกัน (Incident) กับเส้นเชื่อมนั้น

กราฟสามารถแบ่งคร่าว ๆ ได้ 2 ชนิด ได้แก่ กราฟเชิงเดียว (Simple Graph) คือ กราฟที่ไม่มีวงวน และเส้นเชื่อมนาน แม้แต่ติดกัน (Multigraph) คือ กราฟที่อาจมีวงวนหรือเส้นเชื่อมนานได้ ซึ่งถ้ากล่าวถึงกราฟโดยทั่วไปจะหมายถึง กราฟเชิงเดียว

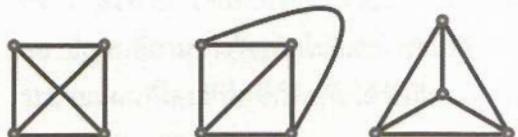


วงวน (Loop) เส้นเชื่อมนาน (Multiple Edge)



ในทฤษฎีกราฟ ตำแหน่งจุดยอดและความยาวเส้นเชื่อมไม่มีความสำคัญ ดังนั้น เราสามารถวาดแผนภาพของกราฟอันหนึ่งได้หลายวิธี ตัวอย่างที่ 3 แสดงกราฟ 3 กราฟ ซึ่งถือว่าเป็นกราฟเดียวกัน ซึ่งก็คือ กราฟที่มีจุดยอด 4 จุดและมีเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดทุกคู่ และตัวอย่างที่ 4 แสดงกราฟที่มีจุดยอด 5 จุด และแต่ละจุดเป็นจุดปลายของเส้นเชื่อมสองเส้น

ตัวอย่างที่ 3 แสดงกราฟที่มีจุดยอด 4 จุด และมีเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดทุกคู่



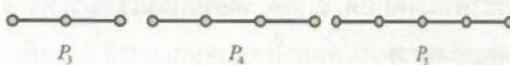
ตัวอย่างที่ 4 แสดงกราฟที่มีจุดยอด 5 จุด และแต่ละจุดเป็นจุดปลายของเส้นเชื่อมสองเส้น



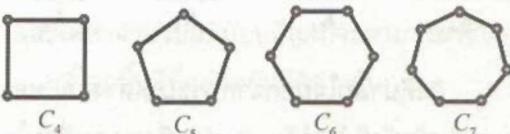
ในทฤษฎีกราฟมีกราฟหลายกลุ่มที่ได้รับการตั้งชื่อ เช่น วิถี (Path), วัฏจักร (Cycle), ต้นไม้ (Tree), กราฟสองส่วน (Bipartite Graph), กราฟสองส่วนบริบูรณ์ (Complete Bipartite Graph) และกราฟบริบูรณ์ (Complete Graph)

วิถี (Path) ในกราฟ คือ ลำดับของจุดยอดซึ่งจุดยอดแต่ละจุดจะมีเส้นเชื่อมเชื่อมจุดยอดในลำดับที่อยู่ติดกัน

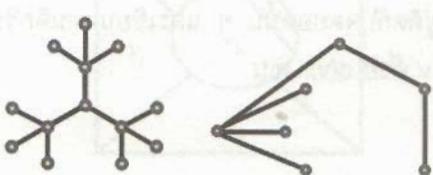
ใช้สัญลักษณ์ P_n แทนวิถีที่มีจุดยอด n จุด



วัฏจักร (Cycle) คือ วิถีที่จุดยอดเริ่มเป็นจุดเดียวกับจุดยอดปลาย

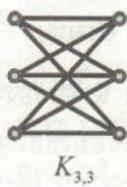


ต้นไม้ (Tree) คือ กราฟที่สองจุดยอดใด ๆ จะมีวิถีเดินทางถึงกันได้เพียงวิถีเดียว หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งว่า เป็นกราฟที่ไม่มีวัฏจักรแต่เป็นกราฟที่เชื่อมต่อกันหมด

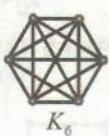
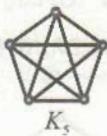
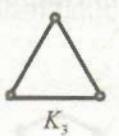


กราฟสองส่วน (Bipartite Graph) คือ กราฟที่เซตจุดยอดสามารถแบ่งได้เป็น 2 เซต ที่ไม่มีส่วนร่วมกัน และจุดยอด 2 จุดใด ๆ ในเซตเดียวกัน จะไม่มีเส้นเชื่อมระหว่างกัน

กราฟสองส่วนบริบูรณ์ (Complete Bipartite Graph) คือ กราฟสองส่วนที่จุดยอดทุกจุดในเซตแรก เชื่อมโยงกับจุดยอดทุกจุดในเซตที่สองทุกจุด

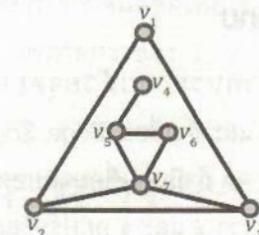


กราฟบริบูรณ์ (Complete Graph) K_n คือ กราฟที่มีจุดยอด n จุด โดยที่มีเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดทุกคู่



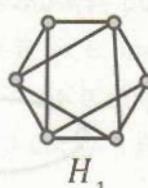
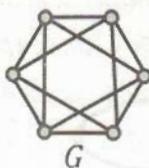
สิ่งที่น่าสนใจจากกราฟต่าง ๆ ของกราฟแล้วยังมีศัพท์อีก 3 คำ ซึ่งทุกคนที่สนใจในทฤษฎีกราฟควรรู้ คือ คำว่า ดีกรี (Degree), กราฟย่อย (Subgraph) และกราฟเชื่อมโยง (Connected Graph)

ดีกรี (Degree) คือ จำนวนของเส้นเชื่อมที่อยู่ติดกับจุดยอดนั้น ๆ และเขียนแทนดีกรีของจุด v ด้วย $d(v)$. เช่น



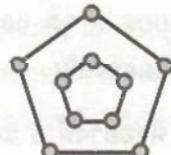
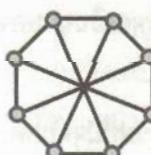
$$\begin{aligned}d(v_1) &= 2 \\d(v_2) &= 3 \\d(v_3) &= 3 \\d(v_4) &= 1 \\d(v_5) &= 3 \\d(v_6) &= 2 \\d(v_7) &= 4\end{aligned}$$

หากล่าวว่า กราฟ H เป็นกราฟย่อย (Subgraph) ของกราฟ G ถ้าจุดยอดทุกจุดของ H เป็นจุดยอดของ G และเส้นเชื่อมทุกเส้นของ H เป็นเส้นเชื่อมของ G



หากล่าวว่ากราฟ G เป็นกราฟเชื่อมโยง (Connected Graph) ถ้าจุดยอด 2 จุดใด ๆ สามารถเชื่อมได้ด้วย Path ใน G

กราฟที่ไม่เชื่อมโยง จะสามารถแบ่งออกเป็นส่วน ๆ ซึ่งแต่ละส่วน เรียกว่า องค์ประกอบ (Component) ของกราฟ



กราฟเชื่อมโยง

กราฟไม่เชื่อมโยง



2. บทประยุกต์

ในส่วนนี้เริ่มนำกราฟมาประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาต่าง ๆ โดยเริ่มจากปัญหาที่นำเสนอใจ 2 ปัญหา คือ ปัญหางะเพานทั้ง 7 แห่งเมืองเคอนิกส์แลับปัญหา 4 สี

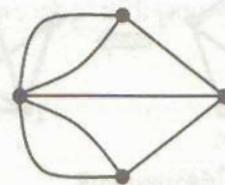
ปัญหางะเพานทั้งเจ็ดแห่งเมืองเคอนิกส์เบร์ก (Seven Bridges of Königsberg) คือปัญหาที่ถามว่าเป็นไปได้หรือไม่ที่จะเดินผ่านให้ครบทั้ง 7 สะพาน ในเมืองนี้ โดยผ่านแต่ละสะพานเพียงครั้งเดียว (วิกิพีเดีย, 2556)



ใน พ.ศ. 2279 (ค.ศ. 1736) เลออนยาาร์ด ออยเลอร์ ได้พิสูจน์ว่าไม่มีทางเป็นไปได้ โดยสร้างกราฟซึ่งแทนพื้นที่แต่ละส่วนด้วยจุดยอด และให้เส้นเชื่อมแต่ละเส้นแทนสะพาน จะได้ว่ากราฟนี้มีจุดยอด 4 จุดและเส้นเชื่อม 7 เส้น ลังเกตว่าเมื่อเดินผ่านเส้นเชื่อมเข้าไปยังจุดใดจุดหนึ่งจะเป็นต้องมีการเดินออกเสมอ ยกเว้นจุดเริ่มต้นและจุดสุดท้าย นั่นหมายความว่า จะสามารถเดินตามเงื่อนไขดังกล่าวได้เมื่อกราฟมีจุดยอดติดกันคืออยู่ไม่เกิน 2 จุด แต่เนื่องจากกราฟดังกล่าว จุดยอดทั้ง 4 จุดมีติดกันคี่ จึงทำให้ว่าไม่สามารถเดินข้ามทั้ง 7 สะพาน โดยที่ไม่ใช่สะพานช้า ปัญหาสี่สี คือ ปัญหาที่ถามว่าจะริงหรือไม่ที่สามารถใช้สี 4 สี ระบายนะแผนที่โดยที่พื้นที่ที่ติดกันได้รับสีต่างกันได้ (Wikipedia, 2013)



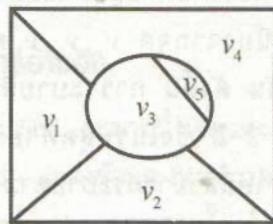
นักคณิตศาสตร์หลายคนทุ่มเทให้กับการพิสูจน์ทฤษฎีนี้แต่กว่าจะมีผู้พิสูจน์ได้ก็ใช้เวลามากกว่า 1 ศตวรรษ ซึ่งวิธีการสร้างกราฟเพื่อเป็นแบบจำลองของปัญหานี้ คือ ให้จุดยอดแทนด้วยพื้นที่แต่ละส่วนและมีเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดที่แทนด้วยพื้นที่ที่อยู่ติดกันดังรูป



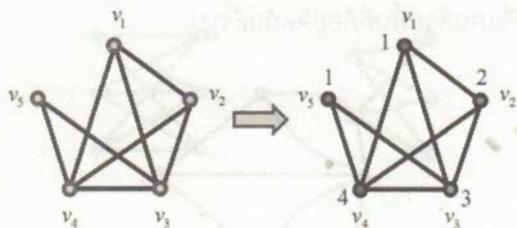
แล้วสุดท้ายคือพิสูจน์ให้ได้ว่าสามารถใช้สีเพียง 4 สีระบายจุดยอดทั้งหมดให้จุดยอดที่อยู่ติดกันมีสีต่างกันได้

ตัวอย่างที่ 5 และตัวอย่างที่ 6 เป็นคำถามนำทำงานของเดียวกับปัญหา 4 สี คือ กำหนดแผนที่มาให้ และให้หาจำนวนสีที่น้อยที่สุดที่จะสามารถระบายแผนที่โดยพื้นที่ที่อยู่ติดกันมีสีต่างกัน

ตัวอย่างที่ 5 จงหาจำนวนสีที่น้อยที่สุดที่ระบายพื้นที่ในรูปพร้อมวิธีระบาย โดยพื้นที่ที่อยู่ติดกันต้องมีสีต่างกัน

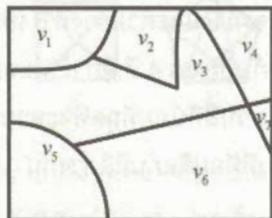


วิธีการเปลี่ยนเป็นโมเดลทางทฤษฎีกราฟคือ แทนพื้นที่แต่ละส่วนด้วยจุดยอดและลากเส้นเชื่อมระหว่างพื้นที่ที่อยู่ติดกันแล้วจึงทำการระบายสี เนื่องจากจุด v_1, v_2, v_3, v_4 ต้องการสีที่แตกต่างกัน ดังนั้น การระบายสีจึงต้องใช้อย่างน้อย 4 สี ซึ่งในรูปสุดท้ายก็ได้แสดงให้เห็นว่ากราฟนี้สามารถระบายตามเงื่อนไขได้โดยใช้สีไม่เกิน 4 สี สรุปว่าจำนวนสีที่น้อยที่สุดการระบายพื้นที่นี้ คือ 4 สี

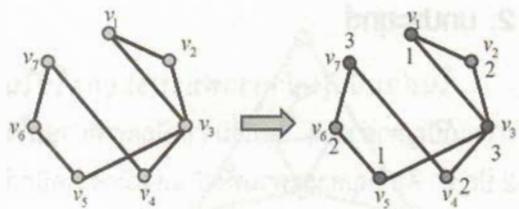


หมายเหตุ นิยมใช้ตัวเลขแทนสี

ตัวอย่างที่ 6 จงหาจำนวนสีที่น้อยที่สุดที่ระบายพื้นที่ในรูปพร้อมวิธีระบาย โดยพื้นที่ที่อยู่ติดกันต้องมีสีต่างกัน



วิธีการเปลี่ยนเป็นโมเดลทางทฤษฎีกราฟคือ แทนพื้นที่แต่ละส่วนด้วยจุดยอดและลากเส้นเชื่อมระหว่างพื้นที่ที่อยู่ติดกันแล้วจึงทำการระบายสี เนื่องจากจุด v_1, v_2, v_3 ต้องการสีที่แตกต่างกัน ดังนั้น การระบายสีจึงต้องใช้อย่างน้อย 3 สี ซึ่งในรูปสุดท้ายก็ได้แสดงให้เห็นว่ากราฟนี้สามารถระบายตามเงื่อนไขได้โดยใช้สีไม่เกิน 3 สี สรุปว่าจำนวนสีที่น้อยที่สุดการระบายพื้นที่นี้คือ 3 สี



3. กฎภูมิคุณภาพของกราฟ

ต่อไปจะกล่าวถึงทฤษฎีบทและบทแทรกบางอย่างในทฤษฎีกราฟซึ่งสามารถนำมาประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาได้

ทฤษฎีบท 1 ผลรวมดีกรีของจุดยอดทั้งหมดของกราฟเท่ากับสองเท่าของจำนวนเส้นเชื่อมพิสูจน์ เนื่องจากเส้นเชื่อมแต่ละเส้นมีจุดปลายสองจุด ซึ่งการลากเส้นเชื่อมหนึ่งเส้นจะทำให้ผลรวมดีกรีของทุกจุดยอดในกราฟเพิ่มขึ้นเส้นละสอง เริ่มต้นจากกราฟที่ไม่มีเส้นเชื่อมมีผลรวมดีกรีเป็นศูนย์ กราฟที่มีเส้นเชื่อมหนึ่งเส้นมีผลรวมดีกรีเป็นสอง กราฟที่มีเส้นเชื่อมสองเส้นมีผลรวมดีกรีเป็นสี่ เป็นเช่นนี้ไปเรื่อยๆ

บทแทรก 2 ผลรวมดีกรีของจุดยอดทั้งหมดของกราฟเป็นจำนวนคู่

พิสูจน์ เนื่องจากผลรวมดีกรีของจุดยอดทั้งหมดของกราฟเท่ากับสองเท่าของจำนวนเส้นเชื่อม จะได้ว่าผลรวมดีกรีของจุดยอดทั้งหมดของกราฟเป็นจำนวนคู่เสมอ

บทแทรก 3 จำนวนของจุดยอดที่มีดีกรีคือจำนวนที่เป็นจำนวนคู่เสมอ

พิสูจน์ สมมติให้จำนวนของจุดยอดที่มีดีกรีคือจำนวนคู่ จำนวนคี่ ก็ต้องมีจำนวนคี่ เกิดข้อขัดแย้ง



ตัวอย่างที่ 7 ในประเทศไทยแห่งหนึ่งมีเมืองอยู่ 100 เมือง และมีถนน 4 สายที่ผ่านเข้าออกแต่ละ เมือง จงหาว่ามีจำนวนถนนในประเทศไทยทั้งหมด กี่สาย

พิจารณากราฟที่มีจุดยอด 100 จุด และแต่ละ จุดมีดีกรีเท่ากับสี่ จะได้ว่า กราฟนี้มีเลันเชื่อม 200 เส้น

ตัวอย่างที่ 8 มีนักเรียน 30 คนในชั้นเรียนหนึ่ง เป็นไปได้หรือไม่ที่จะมีคน 9 คนที่แต่ละคนมีเพื่อน 3 คน, มี 11 คนที่มีเพื่อน 4 คน และมี 10 คนที่มี เพื่อน 5 คน

พิจารณากราฟที่มีจุดยอด 30 จุด ถ้ามีจุด ยอด 9 จุดที่แต่ละจุดมีดีกรี 3, จุดยอด 11 จุดที่มี ดีกรี และจุดยอด 10 จุดที่มีดีกรี 5 จะได้ว่าผลรวม ดีกรีของจุดยอดทั้งหมดคือ $9 \times 3 + 11 \times 4 + 10 \times 5 = 121$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะผลรวมดีกรี ต้องเป็นจำนวนคู่เท่านั้น

ตัวอย่างที่ 9 เป็นไปได้หรือไม่ที่จะลากส่วน ของเส้นตรง 9 เส้นในรูปแบบโดยให้แต่ละเส้นตัด กับส่วนของเส้นตรงอื่น 3 จุดพอดี

ให้จุดยอดแต่ละจุดแทนเส้นตรงแต่ละเส้น ถ้าเส้นตรงคู่ใดตัดกันให้ลากเส้นเชื่อมระหว่าง จุดยอดที่แทนเส้นตรงคู่นั้น

นั่นคือดีกรีของจุดยอดแต่ละจุดคือจำนวน เส้นตรงที่ตัดกับเส้นตรงที่แทนตัวย่อจุดยอดดังกล่าว จะได้ว่าผลรวมดีกรีเท่ากับ $9 \times 3 = 27$ เป็นไปไม่ได้ เพราะผลรวมดีกรีต้องเป็นจำนวนคู่เท่านั้น

ตัวอย่างที่ 10 ประเทศไทยมี 15 เมือง แต่ละ เมืองมีถนนเชื่อมเมืองอื่นอย่างน้อย 7 เมือง จง แสดงว่าประชาชนในประเทศไทย สามารถเดินทาง

จากเมืองใดเมืองหนึ่งไปยังเมืองที่ต้องการได้เสมอ สร้างกราฟที่มีจุดยอด 15 จุด แทนเมืองทั้ง 15 เมือง ลากเส้นเชื่อมระหว่างจุดที่แทนเมืองที่มี ถนนเชื่อมถึงกัน

สมมติว่ากราฟนี้ไม่เป็นกราฟเชื่อมโยง ดังนั้น กราฟนี้สามารถแบ่งเป็นกราฟย่อย 2 กราฟ ได้ โดยที่กราฟย่อยแต่ละกราฟไม่มีจุดยอดซ้ำกัน และไม่มีเส้นเชื่อมระหว่างจุดในกราฟย่อยทั้ง 2 กราฟ เนื่องจากแต่ละจุดมีดีกริอย่างน้อย 7 จังได้ว่า ในแต่ละกราฟย่อยมีจุดยอดอย่างน้อย 8 จุด เกิด ข้อขัดแย้ง เพราะกราฟนี้มีจุดยอดเพียง 15 จุด เท่านั้น

4. สรุป

ในบทความนี้เพียงนำเสนอกล่าวถึงต้น ของทฤษฎีกราฟเท่านั้น ในความเป็นจริงแล้วทฤษฎี กราฟเป็นวิชาที่มีการศึกษาอย่างกว้างขวาง รวมทั้งมีการประยุกต์ใช้ในหลากหลายสาขา เช่น การวางแผนเครือข่ายสาธารณะโลก คอมพิวเตอร์ เน็ตเวิร์ก การประยุกต์ชื่นอยู่กับผู้ใช้งานว่าต้องการ สร้างโมเดลเพื่อจำลองปัญหาได้ บางครั้งเพียงแค่ สร้างโมเดลทางทฤษฎีกราฟขึ้นมาก็ช่วยให้หา คำตอบของปัญหาได้ทันทีดังตัวอย่างที่ 1 และ ตัวอย่างที่ 2 แต่ในบางครั้งก็ต้องอาศัยความรู้ ในทฤษฎีกราฟมาช่วย ดังตัวอย่างที่ 6, ตัวอย่าง ที่ 7, ตัวอย่างที่ 8 และตัวอย่างที่ 9

5. เอกสารอ้างอิง

วิกิพีเดีย. 2556. สะพานทั้งเจ็ดแห่งเมืองคอนิกส์ แบร์ก. แหล่งข้อมูล: <http://th.wikipedia.org/wiki/สะพานทั้งเจ็ดแห่งเมืองคอนิกส์แบร์ก>

Kenneth A., Wolfgang H. 1977. Every Planar Map is Four Colorable Part I. Discharging, Illinois Journal of Mathematics 21, 429-490.

Kenneth A., Wolfgang H., John K. 1977. Every Planar Map is Four Colorable Part II. Reducibility, Illinois Journal of Mathematics 21, 491-567.

Kenneth A., Wolfgang H. 1977. Solution of the Four Color Map Problem, Scientific American, 237(4), 108-12.

West D.B. 2001. Introduction to Graph Theory, Prentice Hall, New Jersey.

Wikipedia. 2013. Four color theorem. แหล่งข้อมูล: http://en.wikipedia.org/wiki/Four_col_theorem

Wikipedia. 2013. Graph theory. แหล่งข้อมูล: http://en.wikipedia.org/wiki/Graph_theory