การศึกษาสภาวะที่เหมาะสมของมังคุดกวนโดยการกวนด้วยเครื่องกวนผลไม้สุญญากาศ

The Optimization of Mangosteen Paste by Vacuum Paste Machine

ทรงศักดิ์ มิ่มกระโทก กุลพร พุทธมี

คณะเทคโนโลยีการเกษตร มหาวิทยาลัยราชภัฏรำไพพรรณี

บทคัดย่อ

การวิจัยครั้งนี้ มีจุดประสงค์เพื่อศึกษาสภาวะที่เหมาะสมของมังคุดกวน โดยการกวนด้วยเครื่องกวนผลไม้สุญญากาศ และมีขั้นตอนในการดำเนินการ คือ ทดลองกวนมังคุด ด้วยเครื่องกวนผลไม้สุญญากาศ ที่ความดัน 600 mmHg อุณหภูมิ 40 °C 45 °C และ 50°C เวลา 2 ชั่วโมง, 2 ชั่วโมง 15 นาที และ 2 ชั่วโมง 30 นาที วิเคราะห์สภาวะที่เหมาะสมสำหรับการกวนมังคุด โดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ หลังจากนั้นนำมาทดสอบผลิตภัณฑ์ ทางด้านกายภาพ ทางเคมี และทางประสาทสัมผัส การวิเคราะห์ข้อมูลโดยใช้ค่าเฉลี่ย และความเบี่ยงเบนมาตรฐาน

ผลการวิจัยพบว่า การปรับปรุงและพัฒนาเครื่องกวนผลไม้สุญญากาศ โดยการทำกระทะกวนเป็นผนังสองชั้น เปลี่ยนพลังงานในการให้ความร้อนจากการเผาไหม้ของแก๊สเป็นขดลวดให้ความร้อนจากพลังงานไฟฟ้า ทำให้อัตราการใช้พลังงาน ลดลง และไม่มีการไหม้ที่ผนังกระทะกวน สภาวะที่เหมาะสมสำหรับการกวน คือ การกวนด้วยเครื่องกวนผลไม้สุญญากาศ ที่อุณหภูมิ 45°C เวลา 135 นาที ผลการทดสอบคุณสมบัติมังคุดกวนค่าความหวานสูงที่สุด คือ การกวนที่อุณหภูมิ 50°C เวลา 150 นาที เท่ากับ 76 °Brix ค่าวอเตอร์แอคตีวิตี้สูงสุด คือ การกวนที่อุณหภูมิ 40 °C เวลา 120 นาที เท่ากับ 0.75 ค่าสีความสว่าง (L) สูงที่สุด คือ การกวนที่อุณหภูมิ 40 °C เวลา 150 นาทีเท่ากับ 38.59 ค่าสีแดงเขียว(a) สูงที่สุด คือ การกวนที่อุณหภูมิ 50 °C เวลา 150 นาที เท่ากับ 10.66 ค่าสีน้ำเงินเหลือง (b) สูงที่สุด คือ การกวนที่อุณหภูมิ 50 °C เวลา 120 นาที เท่ากับ 24.15 ผลการทดสอบทางประสาทสัมผัสของผลิตภัณฑ์มังคุดกวน ทางด้านสี กลิ่น รสชาติ เนื้อสัมผัส และความชอบโดยรวม ให้ค่าแตกต่างกันทางสถิติ ($p<0.05$) การยอมรับที่สูงที่สุด คือ ที่สภาวะการกวน ที่อุณหภูมิ 45°C เวลา 135 นาที

คำสำคัญ : สภาวะที่เหมาะสม, มังคุดกวน , เครื่องกวนผลไม้สุญญากาศ

Abstract

The objectives of this research was to study the optimization of mangosteen paste by vacuum paste machine. The process of this research consisted of test mangosteen stirred by vacuum paste machine under vacuum (600 mm.Hg) at various frying temperature at 40, 45 and 50 °C, various frying time at 120, 135 and 150 minutes. To determine optimum frying condition was stirred by computer program and the samples were subjected to physical, chemical and sensory evaluation. The data analysis were mean and standard deviation.

The results showed that the improvement vacuum paste machine by made two sheet of vessel and change power source was reduced consumer power and prevent burning tank. The optimization condition of mangosteen paste was stirred at temperature 45°C and length of time 135 minutes. The highest of properties of mangosteen paste were 76 °Brix at temperature 50°C and length of time 150 minutes, 0.75 Aw at temperature 40°C and length of time 120 minutes, 38.59 colour (L) at temperature 40°C and length of time 150 minutes, 10.66 colour (a) at temperature 50°C and length of time 150 minutes and 24.15 colour (b) at temperature 50°C and length of time 120 minutes. The sensory evaluation of mangosteen paste colour, odor, taste, texture and overall sensory, found it was significant different at 0.05 level. The highest acceptability was at the condition of temperature 45°C and length of time 135 minutes.

Keywords : Optimization, mangosteen paste, Vacuum Paste Machine

บทนำ

ภาคตะวันออกของประเทศไทย จังหวัดจันทบุรี ระยอง และตราด เป็นแหล่งผลิตไม้ผลเศรษฐกิจที่สำคัญของประเทศ ทั้งมังคุด มังคุด เงาะ เป็นต้น ในช่วงเวลาที่ผ่านมาเกษตรกรที่ผลิตไม้ผลเศรษฐกิจดังกล่าว ประสบปัญหาด้านการผลิตและการตลาดมาอย่างต่อเนื่อง แต่ถ้าหากเกษตรกรสามารถจัดการบริหารกระบวนการผลิตได้อย่างมีประสิทธิภาพ โดยการใช้กรรมวิธีการผลิตที่มีปริมาณและคุณภาพตรงความต้องการของตลาด ใช้ต้นทุนการผลิตที่เหมาะสม มีวิธีการผลิตที่ปลอดภัย ไม่เกิดมลพิษต่อผู้บริโภคและสิ่งแวดล้อม จะทำให้การผลิตไม้ผลเศรษฐกิจได้อย่างยั่งยืน

ปัญหาหนึ่งของไม้ผลเศรษฐกิจ ภาคตะวันออก คือ ราคาผลผลิตที่มีราคาถูก การแก้ปัญหาของเกษตรกร โดยการแปรรูป เช่น การกวนมังคุด การทอดมังคุด การอบแห้งขนุน เป็นต้น เป็นการสร้างมูลค่าเพิ่ม สามารถเพิ่มรายได้แก่เกษตรกร ปัจจุบันเกษตรกรภาคตะวันออก ทั้งจังหวัดจันทบุรี ระยอง และตราด ได้ดำเนินการแปรรูปไม้ผลเศรษฐกิจ เช่น มังคุดสุก เป็นมังคุดกวน โดยการนำเนื้อมังคุดสุกมากวนกับน้ำตาลทราย จนได้ผลิตภัณฑ์ที่มีลักษณะเหนียว มัน และล่อนไม่ติดไม้พายหรือติดก้นกระทะ มีสีเหลืองปนน้ำตาล สำหรับรับประทานเป็นอาหารว่างหรือของฝาก

ปี 2550 ไทยส่งออกผลไม้และผลิตภัณฑ์ในปริมาณ 1.8 ล้านตัน มูลค่า 51,519 ล้านบาท เป็นผลไม้สดแช่เย็น แช่แข็ง และแห้ง ปริมาณ 703,322 ตัน มูลค่า 13,200 ล้านบาท และผลไม้กระป๋องและแปรรูป ปริมาณ 1.1 ล้านตัน มูลค่า 38,319 ล้านบาท สำหรับปี 2551 (มกราคม-กันยายน) ไทยส่งออกผลไม้และผลิตภัณฑ์ ปริมาณ 1.5 ล้านตัน มูลค่า 44,719.51 ล้านบาท ปริมาณและมูลค่า เพิ่มขึ้นร้อยละ 10.9 และ 15.4 ตามลำดับจากช่วงเดียวกันของปีก่อน เป็นผลไม้สดแช่เย็น แช่แข็ง และแห้ง ปริมาณ 620,728 ตัน มูลค่า 11,557 ล้านบาท ปริมาณและมูลค่าเพิ่มขึ้นร้อยละ 9.72 และ 9.56 ตามลำดับจากช่วงเดียวกันของปีก่อน โดยผลไม้ส่งออกที่สำคัญได้แก่ มังคุด ลำไย มังคุด มะม่วง ลิ้นจี่ ผลไม้ประเภทส้ม กล้วย เงาะ และสับปะรด ส่วนผลิตภัณฑ์จากผลไม้ประกอบด้วย ผลไม้กระป๋อง ผลไม้แปรรูป และน้ำผลไม้ (ศูนย์เทคโนโลยีสารสนเทศและการสื่อสาร สำนักงานปลัดกระทรวงพาณิชย์, 2551)

กรรมวิธีการกวนในปัจจุบัน โดยใช้กระทะที่มีขนาดใหญ่ ใช้เชื้อเพลิงจากฟืน ถ่าน หรือแก๊สหุงต้ม นำมังคุดสุกผสมกับน้ำตาลลงในกระทะ ใช้แรงงานคนหรือมอเตอร์ กวนใบพาย เป็นการใช้แรงงาน และพลังงานที่สูง เนื่องจากมีการสูญเสียความร้อนไปยังบรรยากาศ ดังนั้นจึงมีนักประดิษฐ์ ได้สร้างเครื่องกวนสุญญากาศเพื่อลดเวลาและพลังงานที่ใช้ แต่เครื่องกวนดังกล่าว ยังมีประสิทธิภาพการทำงานต่ำ

ทรงศักดิ์ มิ่มกระโทก และคณะ (2551) ทำการวิจัยเครื่องกวนผลไม้สุญญากาศ พบว่า การทดสอบ อัตราการใช้พลังงาน ในการกวนแก้วมังกร ปริมาณแก๊สที่ใช้มากที่สุด คือ การกวน ที่อุณหภูมิ 40 °C เวลา 150 นาที เท่ากับ 1.20 กิโลกรัม หรือ 0.480 กิโลกรัมแก๊สต่อชั่วโมง ปริมาณแก๊สเฉลี่ย เท่ากับ 0.542 กิโลกรัมแก๊สต่อชั่วโมง คิดเป็นเงิน 9.75 บาทต่อชั่วโมง จำนวนไฟฟ้าที่ใช้มากที่สุด คือ การกวนที่อุณหภูมิ 40 °C เวลา 152 นาที เท่ากับ 1.920 หน่วยต่อชั่วโมง ปริมาณไฟฟ้าเฉลี่ย เท่ากับ 1.660 หน่วยต่อชั่วโมง คิดเป็นเงิน 4.20 บาทต่อชั่วโมง การเปรียบเทียบคุณสมบัติทางกายภาพของแก้วมังกรหลังการกวนที่สภาวะสุญญากาศ ที่อุณหภูมิ 40°C, 45 °C และ50 °C พบว่า ค่าความชื้นสูงที่สุด คือ การกวนที่อุณหภูมิ 40 °C เท่ากับ 37.013 ค่าวอเตอร์แอคตีวิตี้สูงสุด คือ การกวนที่อุณหภูมิ 40 °C เท่ากับ 0.463 ค่าสีความสว่าง (L) สูงที่สุดคือ การกวนที่อุณหภูมิ 40 °C เท่ากับ 40.730 ค่าสีแดงเขียว (a) สูงที่สุด คือ การกวนที่อุณหภูมิ 40 °C เท่ากับ 6.960 ค่าสีน้ำเงินเหลือง (b) สูงที่สุด คือ การกวนที่อุณหภูมิ 40 °C เท่ากับ 18.500 การทดสอบทางประสาทสัมผัสของผลิตภัณฑ์แก้วมังกรทอด การยอมรับที่สูงที่สุด คือ ที่สภาวะการกวน ที่อุณหภูมิ 45°C เวลา 110 นาที มีการยอมรับด้านสี ด้านรสชาติ ด้านเนื้อสัมผัส และด้านการยอมรับความชอบโดยรวม และการกวนที่เหมาะสมที่สุด คือ การกวนที่อุณหภูมิ 45 °C เวลา 110 นาที มีการยอมรับด้านสี ด้านรสชาติ ด้านเนื้อสัมผัส และด้านการยอมรับความชอบโดยรวม

สภาวะที่เหมาะสม เป็นวิธีการทางคณิตศาสตร์ เพื่อใช้หาค่าของตัวแปรที่สัมพันธ์กันแต่ละค่า มีค่าเป็นเท่าใด ที่จะทำให้ได้ผลผลิตที่ดีเหมาะสมที่สุด การหาสภาวะที่เหมาะสมสำหรับการกวนมังคุด เป็นการใช้สมการคณิตศาสตร์ คำนวณหา ค่าของตัวแปรที่เกี่ยวข้องกับการกวนที่จะทำให้ได้ผลิตที่ดีที่สุด คือ ค่าความดันในถังกวน อุณหภูมิ และเวลาที่ใช้ในการกวนมังคุด

ดังนั้น คณะผู้วิจัยจึงมีแนวความคิดในการศึกษาสภาวะที่เหมาะสมของมังคุดกวน โดยการกวนด้วยเครื่องกวนผลไม้สุญญากาศ เนื่องจากการกวนด้วยระบบดังกล่าวเป็นการประหยัดพลังงาน ผลิตภัณฑ์ที่ได้คงสภาพเดิม ทางด้านสี กลิ่น และรสชาติ

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. เพื่อปรับปรุงและพัฒนาเครื่องกวนผลไม้สุญญากาศ
2. เพื่อศึกษาสภาวะที่เหมาะสมของมังคุดกวน โดยการกวนด้วยเครื่องกวนผลไม้สุญญากาศ

วิธีดำเนินงานวิจัย

1. รวบรวมข้อมูลวัตถุดิบ และกระบวนการกวนมังคุด โดยการสัมภาษณ์ ผู้ประกอบการผลิตมังคุดกวนในเขตจังหวัดจันทบุรี ทางด้านขั้นตอนการกวนมังคุด วิธีการกวน ส่วนประกอบและคุณลักษณะที่ต้องการ
2. ปรับปรุงและพัฒนาเครื่องกวนผลไม้สุญญากาศ โดยการสร้างกระทะกวนเป็นผนังสองชั้น เพื่อเติมของเหลวเช่นน้ำ หรือ น้ำมัน เป็นตัวกลางในการพาความร้อน
3. ทดลองกวนมังคุด ด้วยเครื่องกวนผลไม้สุญญากาศที่ความดัน 600 mmHg อุณหภูมิ 40 °C 45 °C และ 50°C เวลา 2 ชั่วโมง, 2 ชั่วโมง 15 นาที และ 2 ชั่วโมง 30 นาที
4. วิเคราะห์สภาวะที่เหมาะสมสำหรับการกวนมังคุด การวิเคราะห์สภาวะที่เหมาะสมสำหรับการกวนมังคุด โดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำเร็จรูป (Minitab) ทำการวิเคราะห์หาสภาวะที่เหมาะสม โดยวิธี Plackett-Burman Design

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \times 1 + \beta_2 \times 2 + \beta_{11} \times 1^2 + \beta_{22} \times 2^2 + \beta_{12} x_1 x_2 + \varepsilon$$

ค่าตัวแปร β คือสัมประสิทธิ์รีเกรสชั่น (regression coefficients)

5. ทดสอบการกวน ตามสภาวะที่เหมาะสมที่ได้จากการวิเคราะห์ทางคณิตศาสตร์การทดสอบผลิตภัณฑ์ การวิเคราะห์คุณภาพความชื้นในอาหาร ค่าวอเตอร์แอคทิวิตี้ (Water activity) สี ระบบ CIE และ ความพึงพอใจโดยรวม
6. สรุปและรายงานผล

ผลการวิจัย

1. การรวบรวมข้อมูลวัตถุดิบ และกระบวนการกวนมังคุด

กระบวนการผลิตมังคุดกวน โดยใช้ภูมิปัญญาชาวบ้าน วัสดุอุปกรณ์ในการทำมังคุดกวน ประกอบด้วย กะทะกวน เตาแก๊สหรือถ่านช้อนสำหรับขูดเนื้อมังคุด ไม้พายสำหรับกวน ตาชั่ง ขั้นตอนการทำมังคุดกวน คือ แกะเนื้อมังคุดสุกออกจากเปลือกและเมล็ด ขูดแยกเมล็ดมังคุดออกจากเนื้อมังคุด ชั่งน้ำหนักเนื้อมังคุด ใส่ในกระทะเหล็กหรือสเตนเลสใช้ไฟปานกลาง กวนด้วยไม้พายจนเนื้อมังคุดสุกใส่น้ำตาลทรายกวนต่อไปจนเริ่มเหนียว พอจับตัวเป็นก้อน ลดไฟให้อ่อน กวนต่อจนเหนียวเริ่มมัน จึงจะถือว่าใช้ได้

2. การปรับปรุงและพัฒนาเครื่องกวนผลไม้สุญญากาศ

การปรับปรุงและพัฒนาเครื่องกวนผลไม้สุญญากาศ โดยการสร้างกระทะกวนเป็นผนังสองชั้น เพื่อเติมของเหลวเช่นน้ำ หรือ น้ำมัน เป็นตัวกลางในการพาความร้อน แล้วทำการทดสอบคุณลักษณะของเครื่องกวนผลไม้สุญญากาศ โดยทำการเปรียบเทียบก่อนการปรับปรุง ทำการทดสอบอัตราการปั๊มของระบบโดยการจับเวลา จนทำให้ระบบมีความดันต่ำกว่าบรรยากาศ 600 mmHg ทำการทดสอบหาเวลาในการให้ความร้อนจากอุณหภูมิห้องจนถึงอุณหภูมิที่ใช้ในการกวนที่ 60 °C และอัตราการใช้พลังงาน แสดงผลดังตารางดังนี้

ตารางที่ 1 การเปรียบเทียบคุณลักษณะของเครื่องกวนผลไม้สุญญากาศก่อนและหลังการปรับปรุง

ครั้งที่	อัตราการปั๊ม (วินาที)		เวลาในการให้ความร้อน (วินาที)		อัตราการใช้พลังงาน (บาท/ชม.)	
	ก่อน	หลัง	ก่อน	หลัง	ก่อน	หลัง
1	182	179	180	165	13.95	9.52
2	178	178	185	160	14.20	9.65
3	180	176	182	162	14.15	9.60
เฉลี่ย	180	177.66	182.33	162.33	14.10	9.59

จากการเปรียบเทียบคุณลักษณะของเครื่องกวนผลไม้สุญญากาศก่อนการปรับปรุง และหลังการปรับปรุง พบว่า อัตราการปั๊มสุญญากาศลดลงจาก 180 วินาที เป็น 177.66 วินาที เวลาในการให้ความร้อนจากอุณหภูมิห้องถึงอุณหภูมิในการกวนที่ 60 °C ลดลงจากจาก 182.33 วินาทีเป็น 162.33 วินาที อัตราการใช้พลังงาน ลดลงจาก 14.10 บาท/ชม.เป็น 9.59 บาท/ชม. และ ไม่มีการไหม้ที่ผนังกระทะกวน

3. การทดลองกวนมังคุด ด้วยเครื่องกวนผลไม้สุญญากาศ

กำหนดคุณสมบัติการกวนสุญญากาศที่ ความดันต่ำกว่าบรรยากาศ ที่ 600 mmHg อุณหภูมิ ที่ 40 °C , 45 °C และ 50°C เวลาที่ 120 นาที 135 นาที และ 150 นาที ทำการวิเคราะห์คุณภาพอาหาร ทางด้าน ความชื้น ค่าวอเตอร์แอคทิวิตี้ สี และการประเมินคุณภาพทางประสาทสัมผัส ดังนี้

3.1 คุณสมบัติของมังคุดก่อนการกวนภายใต้สภาวะสุญญากาศ

มังคุดก่อนการกวน มีค่าความหวานเฉลี่ย เท่ากับ 28 °Brix ค่าวอเตอร์แอคทิวิตี้เฉลี่ย เท่ากับ 0.89 และ สี เฉลี่ยค่า L เท่ากับ 64.38 ค่า a เท่ากับ -3.33 และ ค่า b เท่ากับ 21.55

3.2 คุณสมบัติของมังคุดหลังการกวนที่สภาวะสุญญากาศ

3.2.1 การกวนมังคุด จำนวน 20 กิโลกรัม ที่อุณหภูมิ 40 °C เวลา 120 นาที 135 นาที และ 150 นาที ผลทดสอบคุณสมบัติของมังคุดกวน พบว่า ค่าความหวานสูงที่สุด คือ เวลาในการกวน 150 นาที มีค่าเท่ากับ 71 °Brix รองลงมาคือ เวลาในการกวน 135 นาที มีค่าเท่ากับ 70 °Brix และ เวลาในการกวน 120 นาที มีค่าเท่ากับ 68 °Brix ค่าวอเตอร์แอคทิวิตี้ สูงที่สุดคือ เวลาในการกวน 120 นาที มีค่าเท่ากับ 0.75 รองลงมาคือ เวลาในการกวน 135 นาที มีค่าเท่ากับ 0.72 และ เวลาในการกวน 120 นาที มีค่าเท่ากับ 0.70 ค่าสีความสว่าง (L) สูงที่สุดคือ เวลาในการกวน 150 นาที มีค่าเท่ากับ 38.59 รองลงมาคือ เวลาในการกวน 135 นาที มีค่าเท่ากับ 37.25 และ เวลาในการกวน 120 นาที มีค่า เท่ากับ 34.72 ค่าสีแดงเขียว (a) สูงที่สุดคือ เวลาในการกวน 150 นาที มีค่าเท่ากับ 7.43 รองลงมาคือ เวลาในการกวน 135 นาที มีค่าเท่ากับ 6.48 และ เวลาในการกวน 120 นาที เท่ากับ 2.37 ค่าสีน้ำเงินเหลือง (b) สูงที่สุดคือ เวลาในการกวน 120 นาที มีค่าเท่ากับ 18.75 รองลงมาคือ เวลาในการกวน 135 นาที มีค่าเท่ากับ 17.32 และ เวลาในการกวน 150 นาที มีค่าเท่ากับ 16.84

3.2.2 การกวนมังคุด จำนวน 20 กิโลกรัม ที่อุณหภูมิ 45 °C เวลา 120 นาที 135 นาที และ 150 นาที ผลทดสอบคุณสมบัติของมังคุดกวน พบว่าค่าความหวานสูงที่สุด คือ เวลาในการกวน 150 นาที มีค่าเท่ากับ 75 °Brix รองลงมาคือ เวลาในการกวน 135 นาที มีค่าเท่ากับ 72 °Brix และ เวลาในการกวน 120 นาที มีค่าเท่ากับ 70 °Brix ค่าวอเตอร์แอคทิวิตี้สูงที่สุดคือ เวลาในการกวน 120 นาที มีค่าเท่ากับ 0.74 รองลงมาคือ เวลาในการกวน 135 นาที มีค่าเท่ากับ 0.71 และ เวลาในการกวน 120 นาที มีค่าเท่ากับ 0.70 ค่าสีความสว่าง (L) สูงที่สุดคือ เวลาในการกวน 150 นาที มีค่าเท่ากับ 36.15 รองลงมาคือ เวลาในการกวน 135 นาที มีค่าเท่ากับ 35.32 และ เวลาในการกวน 120 นาที มีค่า เท่ากับ 32.69 ค่าสีแดงเขียว (a) สูงที่สุดคือ เวลาในการกวน 150 นาที มีค่าเท่ากับ 9.37 รองลงมาคือ เวลาในการกวน 135 นาที มีค่าเท่ากับ 7.82 และ เวลาในการกวน 120 นาที เท่ากับ 5.24 ค่าสีน้ำเงินเหลือง (b) สูงที่สุดคือ เวลาในการกวน 120 นาที มีค่าเท่ากับ 21.87 รองลงมาคือ เวลาในการกวน 135 นาที มีค่าเท่ากับ 19.43 และ เวลาในการกวน 150 นาที มีค่าเท่ากับ 17.42

3.2.3 การกวนมังคุด จำนวน 20 กิโลกรัม ที่อุณหภูมิ 50 °C เวลา 120 นาที 135 นาที และ 150 นาที ผลทดสอบคุณสมบัติของมังคุดกวนผลทดสอบคุณสมบัติของมังคุดกวน พบว่า ค่าความหวานสูงที่สุดคือ เวลาในการกวน 150 นาที มีค่าเท่ากับ 76 °Brix รองลงมาคือ เวลาในการกวน 135 นาที มีค่าเท่ากับ 74 °Brix และ เวลาในการกวน 120 นาที มีค่าเท่ากับ 71 °Brix ค่าวอเตอร์แอคทิวิตี้ สูงที่สุดคือ เวลาในการกวน 120 นาที มีค่าเท่ากับ 0.72 รองลงมาคือ เวลาในการกวน 135 นาที มีค่าเท่ากับ 0.71 และ เวลาในการกวน 120 นาที มีค่าเท่ากับ 0.69 ค่าสีความสว่าง (L) สูงที่สุดคือ เวลาในการกวน 150 นาที มีค่าเท่ากับ 29.73 รองลงมาคือ เวลาในการกวน 135 นาที มีค่าเท่ากับ 32.51 และ เวลาในการกวน 120 นาที มีค่า เท่ากับ 34.87 ค่าสีแดงเขียว (a) สูงที่สุดคือ เวลาในการกวน 150 นาที มีค่าเท่ากับ 10.66 รองลงมาคือ เวลาในการกวน 135 นาที มีค่าเท่ากับ 9.95 และ เวลาในการกวน 120 นาที เท่ากับ 7.57 ค่าสีน้ำเงินเหลือง (b) สูงที่สุดคือ เวลาในการกวน 120 นาที มีค่าเท่ากับ 24.15 รองลงมาคือ เวลาในการกวน 135 นาที มีค่าเท่ากับ 21.67 และ เวลาในการกวน 150 นาที มีค่าเท่ากับ 20.75

3.2.4 เปรียบเทียบการกวนมังคุด จำนวน 20 กิโลกรัม ที่อุณหภูมิ 40, 45 และ 50 °C ผลทดสอบคุณสมบัติของมังคุดกวนค่าสูงที่สุด พบว่า ค่าความหวานสูงที่สุด คือ การกวน ที่อุณหภูมิ 50 °C เวลา 150 นาที เท่ากับ 76 °Brix รองลงมาคือการกวนที่อุณหภูมิ 45 °C เวลา 150 นาที และ ที่อุณหภูมิ 50 °C เวลา 135 นาที ตามลำดับ ค่าวอเตอร์แอคตีวิตี้สูงสุด คือ การกวนที่อุณหภูมิ 40 °C เวลา 120 นาที เท่ากับ

0.75 รองลงมาคือการกวน ที่อุณหภูมิ 45 °C เวลา 120 นาที และอุณหภูมิ 50 °C เวลา 120 นาที อุณหภูมิ 40 °C เวลา 135 นาที ตามลำดับ ค่าสีความสว่าง (L) สูงที่สุดคือ การกวนที่อุณหภูมิ 40 °C เวลา 150 นาทีเท่ากับ 38.59 รองลงมาคือการกวนที่อุณหภูมิ 40 °C เวลา 135 นาที และ อุณหภูมิ 45 °C เวลา 150 นาที ตามลำดับ ค่าสีแดงเขียว (a) สูงที่สุด คือ การกวนที่อุณหภูมิ 50 °C เวลา 150 นาที เท่ากับ 10.66 รองลงมาคือการกวนที่อุณหภูมิ 50°C เวลา 135 นาที และอุณหภูมิ 45 °C เวลา 150 นาที ตามลำดับ ค่าสีน้ำเงินเหลือง (b) สูงที่สุด คือ การกวนที่อุณหภูมิ 50 °C เวลา 120 นาที เท่ากับ 24.15 รองลงมาคือการกวนที่อุณหภูมิ 45 °C เวลา 120 นาที และอุณหภูมิ 50 °C เวลา 135 นาที ตามลำดับ

3.3 การประเมินคุณภาพทางประสาทสัมผัส

การประเมินคุณภาพทางประสาทสัมผัส ทำการทดสอบชิมโดยผู้เชี่ยวชาญ ผลการทดสอบให้ค่าแตกต่างกันทางสถิติ ($p<0.05$) โดยคะแนนการยอมรับด้าน สี อยู่ระหว่าง 3.12 - 3.41 หมายถึง ความชอบระดับมาก การยอมรับด้านสีที่สูงที่สุดคือ การกวนที่อุณหภูมิ 45°C เวลา 135 นาที การยอมรับด้านกลิ่น อยู่ระหว่าง 3.21 - 3.02 หมายถึง ความชอบระดับมาก การยอมรับด้านกลิ่นที่สูงที่สุดคือ การกวนที่อุณหภูมิ 45°C เวลา 135 นาที การยอมรับด้านรสชาติ อยู่ระหว่าง 3.22 - 3.12 หมายถึง ความชอบระดับมาก การยอมรับด้านรสชาติที่สูงที่สุดคือ การกวนที่อุณหภูมิ 45°C เวลา 135 นาที การยอมรับด้านเนื้อสัมผัส อยู่ระหว่าง 3.26 - 3.09หมายถึง ความชอบระดับมาก การยอมรับด้านเนื้อสัมผัสที่สูงที่สุดคือ การกวนที่อุณหภูมิ 45°C เวลา 135 นาที และ การความชอบโดยรวม อยู่ระหว่าง 3.15 - 3.05 หมายถึง ความชอบระดับมาก การยอมรับด้านความชอบโดยรวมที่สูงที่สุดคือ การกวนที่อุณหภูมิ 45°C เวลา 135 นาที

ผลการทดสอบทางประสาทสัมผัสของผลิตภัณฑ์มังคุดทอด การยอมรับที่สูงที่สุด คือ ที่สภาวะการกวน ที่อุณหภูมิ 45°C เวลา 135 นาที มีการยอมรับด้าน สี ด้านรสชาติ ด้านเนื้อสัมผัส และด้านการยอมรับความชอบโดยรวม

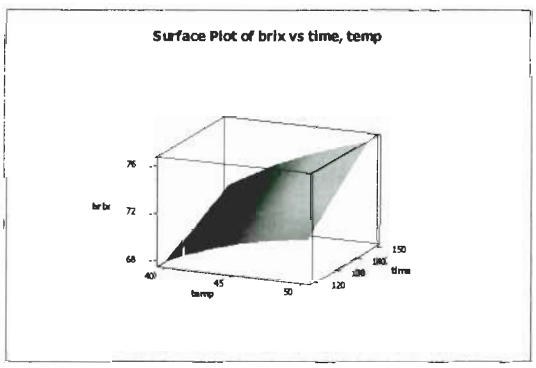
4. การวิเคราะห์ทางสถิติ

4.1 สัมประสิทธิ์การถดถอย

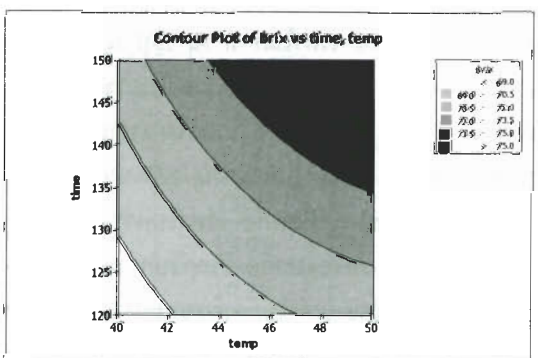
ผลการทดสอบเพื่อหาค่าทางสถิติทางด้านค่าความหวาน ค่าวอเตอร์แอคติวิตี้ และสี เป็นการแสดงค่าสัมประสิทธิ์การถดถอย (Regression Coefficients) โดยมีค่า R2 ของค่าความหวาน ค่าวอเตอร์แอคติวิตี้ และสี (L), (a), (b) เท่ากับ 0.968, 0.944, 0.983, 0.983 และ 0.958 ตามลำดับ

ผลการทดสอบเพื่อหาค่าทางสถิติพบว่า ค่าความหวานที่สูงที่สุดคือการกวนที่อุณหภูมิ 50°C เวลา 150 นาที มีค่าเท่ากับ 1,013.14 ค่าความหวานที่ต่ำที่สุดคือการกวนที่อุณหภูมิ 40°C เวลา 120 นาที มีค่าเท่ากับ 742.38 ค่า Aw ที่สูงที่สุดคือการกวนที่อุณหภูมิ 50°C เวลา 150 นาที มีค่าเท่ากับ 153.29 ค่า Aw ที่ต่ำที่สุดคือการกวนที่อุณหภูมิ 40°C เวลา 120 นาที มีค่าเท่ากับ 97.81 ค่า สี (L) ที่สูงที่สุดคือการกวนที่อุณหภูมิ 50°C เวลา 120 นาที มีค่าเท่ากับ -8,622.36 ค่า สี (L) ที่ต่ำที่สุดคือการกวนที่อุณหภูมิ 40°C เวลา 150 นาที มีค่าเท่ากับ -13,882.00 ค่า สี (a) ที่สูงที่สุดคือการกวนที่อุณหภูมิ 40°C เวลา 120 นาที มีค่าเท่ากับ -13,969.71 ค่า สี (a) ที่ต่ำที่สุดคือการกวนที่อุณหภูมิ 50°C เวลา 150 นาที มีค่าเท่ากับ -21,933.67 และค่า สี (b) ที่สูงที่สุดคือการกวนที่อุณหภูมิ 40°C เวลา 150 นาที มีค่าเท่ากับ 8,533.29 ค่า สี (b) ที่ต่ำที่สุดคือการกวนที่อุณหภูมิ 50°C เวลา 120 นาที มีค่าเท่ากับ 5,250.64

ความสัมพันธ์ของอุณหภูมิและเวลาในการกวนที่มีผลต่อค่าความหวาน แสดงดังภาพประกอบที่ 1 และภาพประกอบที่ 2 พบว่าอุณหภูมิสูงขึ้นและเวลาเพิ่มขึ้น ค่าความหวานเพิ่มขึ้น

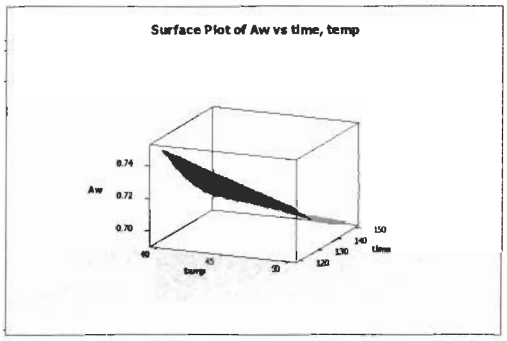


ภาพประกอบที่ 1 แสดงความสัมพันธ์ของอุณหภูมิ และเวลาในการกวนที่มีผลต่อค่าความหวาน

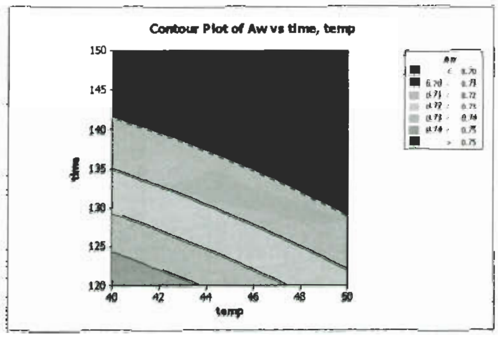


ภาพประกอบที่ 2 แสดงเส้นความชันความสัมพันธ์ของอุณหภูมิและเวลาในการกวนที่มีผลต่อค่าความหวาน

ความสัมพันธ์ของอุณหภูมิและเวลาในการกวนที่มีผลต่อค่า Aw แสดงดังภาพประกอบที่ 3 และภาพประกอบที่ 4 พบว่า อุณหภูมิลดลงและเวลาลดลง ค่า Aw เพิ่มขึ้น

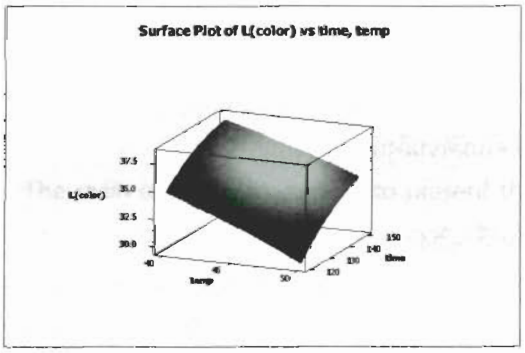


ภาพประกอบที่ 3 แสดงความสัมพันธ์ของอุณหภูมิ และเวลาในการกวนที่มีผลต่อค่า Aw

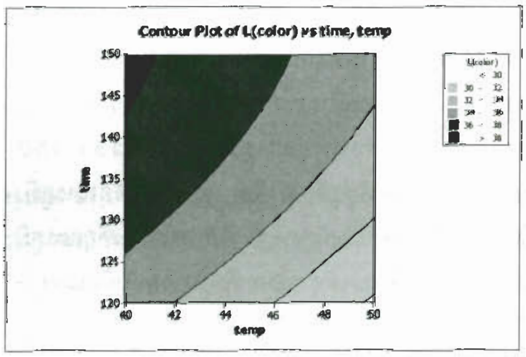


ภาพประกอบที่ 4 แสดงเส้นความชันความสัมพันธ์ ของอุณหภูมิและเวลาในการกวนที่มีผลต่อค่า Aw

ความสัมพันธ์ของอุณหภูมิและเวลาในการกวนที่มีผลต่อค่าสี (L) แสดงดังภาพประกอบที่ 5 และภาพประกอบที่ 6 พบว่า อุณหภูมิลดลงและเวลาเพิ่มขึ้น ค่าสี (L) เพิ่มขึ้น

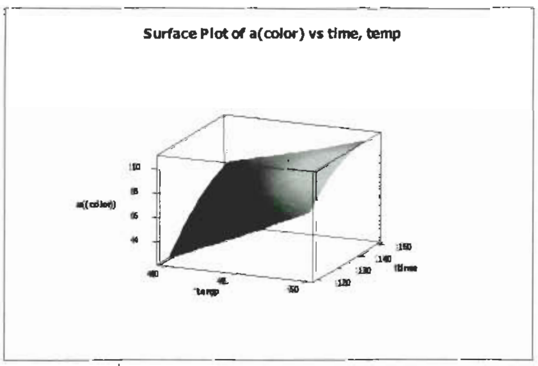


ภาพประกอบที่ 5 แสดงความสัมพันธ์ของอุณหภูมิและเวลาในการกวนที่มีผลต่อค่าสี (L)

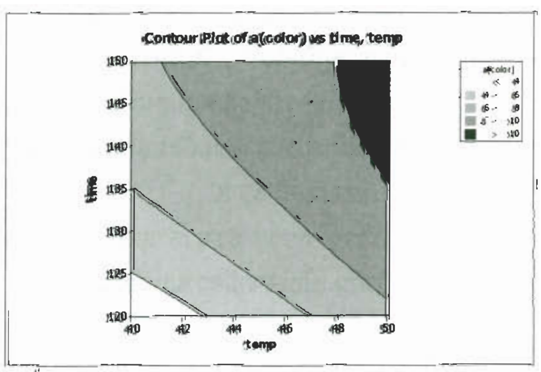


ภาพประกอบที่ 6 แสดงเส้นความชันความสัมพันธ์ของอุณหภูมิและเวลาในการกวนที่มีผลต่อค่าสี (L)

ความสัมพันธ์ของอุณหภูมิและเวลาในการกวนที่มีผลต่อค่าสี(a) แสดงดังภาพประกอบที่ 7 และภาพประกอบที่ 8 พบว่า อุณหภูมิลดลงและเวลาเพิ่มขึ้น ค่าสี(a) เพิ่มขึ้น

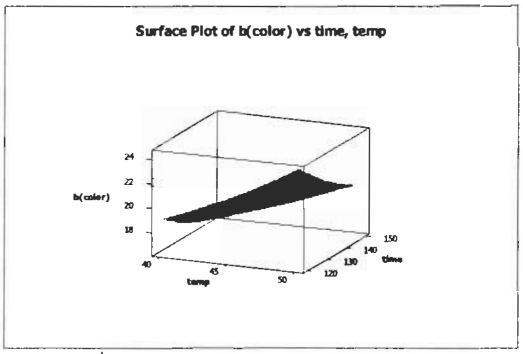


ภาพประกอบที่ 7 แสดงความสัมพันธ์ของอุณหภูมิ และเวลาในการกวนที่มีผลต่อค่าสี(a)

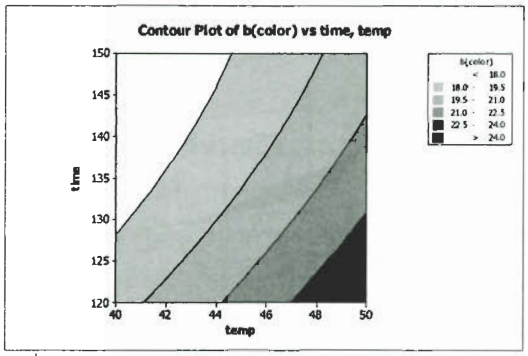


ภาพประกอบที่ 8 แสดงเส้นความชันความสัมพันธ์ของอุณหภูมิและเวลาในการกวนที่มีผลต่อค่าสี(a)

ความสัมพันธ์ของอุณหภูมิและเวลาในการกวนที่มีผลต่อค่าสี(b) แสดงดังภาพประกอบที่ 9 และภาพประกอบที่ 10 พบว่าอุณหภูมิเพิ่มขึ้นและเวลาลดลง ค่าสี (b) เพิ่มขึ้น



ภาพประกอบที่ 9 แสดงความสัมพันธ์ของอุณหภูมิ และเวลาในการกวนที่มีผลต่อค่าสี (b)



ภาพประกอบที่ 10 แสดงเส้นความชันความสัมพันธ์ของอุณหภูมิและเวลาในการกวนที่มีผลต่อค่าสี (b)

4.2 สภาวะที่เหมาะสมสำหรับการกวนมังคุด

ผลการทดสอบโดยใช้เทคนิคการจำลองสถานการณ์เพื่อการหาคำตอบที่เหมาะสม (Response Surface Methodology ; RSM) ทางด้านค่าความหวาน ค่าวอเตอร์แอคติวิตี้ และสี ที่มีผลจากอุณหภูมิและเวลาในการกวนมังคุด พบว่าค่าความหวานที่สูงที่สุด คือ การกวนที่อุณหภูมิ 50°C เวลา 150 นาที ค่าวอเตอร์แอคติวิตี้ที่สูงที่สุด คือ การกวนที่อุณหภูมิ 40°C เวลา 120 นาที ค่าสี (L) ที่สูงที่สุด คือ การกวนที่อุณหภูมิ 40°C เวลา 150 นาทีค่าสี (a) ที่สูงที่สุด คือ การกวนที่อุณหภูมิ 50°C เวลา 150 นาที และค่าสี(b)ที่เหมาะสม คือ การกวนที่อุณหภูมิ 50°C เวลา 120 นาที

ดังนั้น สภาวะที่เหมาะสมสำหรับการกวน คือ การกวนด้วยเครื่องกวนผลไม้สุญญากาศ ที่ อุณหภูมิ 45°C เวลา 135 นาที

การอภิปรายผล

สภาวะการกวนมังคุดด้วยเครื่องกวนสุญญากาศที่เหมาะสมที่สุด คือการกวนที่อุณหภูมิ 45 °C เวลา 150 นาที เนื่องจาก การกวนที่อุณหภูมิ 40 °C ใช้เวลานานกว่า ส่วนการกวน ที่อุณหภูมิ 50 °C เป็นการใช้อุณหภูมิสูงเกินไปทำให้กระทะกวนไหม้ และคุณสมบัติทางประสาทสัมผัสของผลผลิต ไม่เป็นที่ยอมรับเท่ากับการกวนที่อุณหภูมิ 45 °C

ปัญหาการกวน พบว่า ช่วงเวลาสุดท้ายของการกวนเนื้อมังคุดเป็นก้อนเดียวกัน เนื่องจากมีความเหนียวสูง

ข้อเสนอแนะ

3.1 การศึกษาการกวนที่ความดันอื่นๆ

3.2 การศึกษาการกวนผักหรือผลไม้ชนิดอื่น

3.3 การศึกษาอายุการเก็บรักษา

3.4 การพัฒนาเครื่องกวนผลไม้สุญญากาศ โดยการทำเป็นระบบอัตโนมัติจนถึงการบรรจุภัณฑ์

เอกสารอ้างอิง

ทรงศักดิ์ มิ่มกระโทก พอพันธ์ สุทธิวัฒนะ โอภาศ อินทรวงษ์ และ ไพศาล สุขสำราญ. 2551. **เครื่องกวนผลไม้สุญญากาศ.** รายงานวิจัย. จันทบุรี : มหาวิทยาลัยราชภัฏรำไพพรรณี.

ศูนย์เทคโนโลยีสารสนเทศและการสื่อสาร. (2551). **สถานการณ์ผลไม้และผลิตภัณฑ์.** กรุงเทพฯ : สำนักงานปลัดกระทรวงพาณิชย์.

ความสวยงามวางนัยทั่วไป : จำนวนหลายหลักที่ประกอบด้วยเลขโดด 0, 1 และ 9

Generalized beauty : many digit number that contains digits 0, 1 and 9

อรุโณทัย กัลยา **อัยเรศ เอี่ยมพันธ์***

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยพะเยา

บทคัดย่อ

จุดประสงค์หลักของบทความนี้เพื่อนำเสนอผลการศึกษาทางพีชคณิตของจำนวนหลายหลักที่ประกอบด้วยเลขโดด 0 , 1 และ 9 โดยคำตอบเป็นจำนวนหลายหลักที่หลักแรกและหลักสุดท้ายเป็นเลขโดด 1 และหลักที่เหลือเป็นเลขโดด 0 ทั้งหมด ผลการศึกษาพบว่ารูปทั่วไปทางพีชคณิตที่ศึกษาของจำนวนหลายหลักที่ประกอบด้วยเลขโดด 0 , 1 และ 9 เป็นดังนี้ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq 2$ จะได้ว่า

$$(\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n}\times 9\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n-1}9\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n-1})+1\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n-2}1=1\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=3\cdot n-2}1$$

คำสำคัญ : จำนวนหลายหลักที่ประกอบด้วยเลขโดด 0 , 1 และ 9 / จำนวนหลายหลักที่หลักแรกและหลักสุดท้ายเป็นเลขโดด 1 และหลักที่เหลือเป็นเลขโดด 0 ทั้งหมด

Abstract

The main aim of this article is to present the algebraic results of the many digit number that contains 0 , 1 and 9. The answer is the many digit number such that the first digit and the last digit is 1 , and the rest is all 0. The results show that the algebraic general form of many digit number that contains digits 0 , 1 and 9 is

$$(\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n}\times 9\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n-1}9\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n-1})+1\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n-2}1=1\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=3\cdot n-2}1$$

for all positive number $n \geq 2$

Keyword : many digit number that contains digits 0 , 1 and 9 / many digit number such that the first digit and the last digit is 1, and the rest is all 0

บทนำ

ในหลายๆ ครั้งเราจำเป็นที่จะต้องคิดคำนวณเลขที่แสนยาวหรือว่ามีความซับซ้อนโดยไม่มีเครื่องมือหรืออุปกรณ์ทุ่นแรงใดๆ จนบางครั้งทำให้ท้อและเลิกล้มความตั้งใจในการคำนวณ หรือที่ร้ายแรงกว่านั้นเกิดการเกลียดหรือไม่ชอบวิชาคณิตศาสตร์ แท้ที่จริงแล้วตัวเลขหรือจำนวนใดๆ เหล่านั้นไม่ได้มีความน่ากลัว หรือชวนปวดหัวอันใดเลยเพียงหากเรารู้หลักการคิด หรือว่ามีเครื่องทุ่นแรงที่เหมาะสมเป็นตัวช่วยในการหาคำตอบ ถ้าหากเรารู้หลักการคิด ซึ่งเปรียบเหมือนมีเครื่องมือติดตัวตลอดเวลา ก็จะทำให้การแก้ปัญหาไม่ใช่เรื่องยากอีกต่อไป นอกจากจากนี้อาจจะทำให้ใครหลายคนมีทัศนคติที่ดีขึ้นต่อวิชาคณิตศาสตร์ หรืออาจจะเป็นตัวชักนำให้เห็นถึงความสวยงามของวิชาคณิตศาสตร์ก็เป็นไปได้

สำหรับบทความนี้ เราจะใช้จำนวนเศษเหลือในการศึกษาทางพีชคณิตของจำนวนหลายหลักที่ประกอบด้วยเลขโดด 0 , 1 และ 9 โดยการประยุกต์ใช้จำนวนเศษเหลือ $n = {}_q r$ เมื่อ $n = 10 \cdot q + r$ โดยที่ q และ r เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $0 \le r < 10$ (เช่น $25 = {}_2 5$ เพราะว่า $25 = 10 \cdot 2 + 5$ และ $0 \le 5 < 10$) นั้นมีในหลายลักษณะ ดังนี้ สำหรับการศึกษาและประยุกต์ใช้จำนวนเศษเหลือเริ่มเมื่อปี พ.ศ. 2554 โดยอัยเรศ (2554) ได้ศึกษาและหารูปทั่วไปของผลการยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 1 โดยได้พบว่าผลการยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 1 นี้สามารถเขียนอยู่ในรูปทั่วไปที่แน่นอนได้ดังนี้ กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $n = {}_q r$ เมื่อ q และ r เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $0 \le r < 10$ จะได้ว่า

$$\Big(\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n}\Big)^2 = 123\ldots9_1 0_1 1\ldots{}_q(r-1)_q r_q (r-1)\ldots{}_1 1_1 09\ldots321$$

อภิสิทธิ์ และ อัยเรศ (2556) ได้ศึกษาและหารูปทั่วไปของผลคูณของจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นจากเลขโดด 1 ไปทางซ้ายกับเลขโดด 9 โดยได้พบว่าผลการยกกำลังสองนี้สามารถเขียนอยู่ในรูปทั่วไปที่แน่นอนได้ ดังนี้ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

จะได้ว่า สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n โดยที่ $n = {}_q r$ เมื่อ q และ r เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $0 \le r < 10$ จะได้ว่า

$$({}_q r_q (r-1)\ldots{}_1 1_1 09\ldots321)\times 9 = \begin{cases} {}_q(r-1)\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)={}_q(r-1)}9, & 1 \le r < 10 \\ {}_{q-1}9\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)={}_{q-1}9}9, & r = 0 \end{cases}$$

รัตติญา และ อัยเรศ (2556) ได้ศึกษาและหารูปทั่วไปของผลคูณของจำนวน 123456789 กับจำนวนเต็มบวกที่เลขโดด 9 หารลงตัว ซึ่งพบว่า ถ้า $n = {}_q r$ แล้ว

$$12345679 \cdot 9 \cdot n = \underbrace{{}_q r\, {}_q r\, {}_q r \ldots {}_q r}_{\#({}_q r)=9}$$

อัยเรศ (2556) ได้ศึกษาและหารูปทั่วไประหว่างจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 1 กับสมการเชิงเส้น โดยได้พบความสัมพันธ์ดังนี้ กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $n = {}_q r$ เมื่อ q และ r เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $0 \le r < 10$ จะได้ว่า

$$\underbrace{111\ldots111}_{\#(1)={}_q r} = 9 \cdot \left[123\ldots{}_q(r-3)_q(r-2)_q(r-1)\right] + {}_q r$$

จากบทความข้างต้น จะพบว่าการประยุกต์ใช้จำนวนเศษเหลือในการหาคำตอบนั้นมีประโยชน์อย่างมาก ฉะนั้นบทความนี้จึงมีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาและหารูปทั่วไปที่แน่นอนทางพีชคณิตบางอย่างของจำนวนหลายหลักที่ประกอบด้วยเลขโดด 0 , 1 และ 9 โดยเครื่องมือหลักที่เราใช้ในการสร้างจำนวนเศษเหลือและพิสูจน์ทฤษฎีบทหลัก คือ ขั้นตอนวิธีการหาร และหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งกล่าวไว้ดังนี้

ทฤษฎีบท 1 ***ขั้นตอนวิธีการหาร*** (The Division Algorithm) (Clark, 2002) ถ้า a และ b เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $b \neq 0$ แล้วมีจำนวนเต็ม q และ r เพียงชุดเดียวเท่านั้น ซึ่ง

$$a = b \cdot q + r \text{ และ } 0 \le r < |b|$$

ทฤษฎีบท 2 ***หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์*** (The Principle of Mathematical Induction) (Clark, 2002) กำหนดให้ $P(n)$ แทนข้อความเกี่ยวกับจำนวนเต็มบวก n และกำหนดให้ n_0 เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่งสอดคล้องกับข้อความต่อไปนี้

(1) $P(n_0)$ ป็นจริง

(2) ถ้า $P(k)$ เป็นจริง สำหรับจำนวนเต็มบวก $k \ge n_0$ แล้ว $P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \ge n_0$

ต่อไปจะแนะนำให้รู้จักกับจำนวนเศษเหลือ ซึ่งเป็นเครื่องมือที่สำคัญสำหรับการศึกษาของบทความนี้

จากขั้นตอนวิธีการหาร (อัยเรศ, 2554) และ (ณัฐวุฒิ และ อัยเรศ, 2556) ได้นิยามจำนวนเศษเหลือ (remainder number) ไว้ดังนี้ กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็มใดๆ และ $b = 10$ ทำให้ได้ว่ามีผลหาร q และเศษเหลือ r ซึ่งจะได้ $a = 10 \cdot q + r$ และ $0 \leq r < 10$ นั่นคือ r เป็นเลขโดด

นิยาม

$$a := {}_q r$$

เช่น

$$\begin{array}{ccccc}
0 = {}_0 0 & 20 = {}_2 0 & 60 = {}_6 0 & 180 = {}_{18} 0 & 200 = {}_{20} 0 \\
1 = {}_0 1 & 21 = {}_2 1 & 61 = {}_6 1 & 181 = {}_{18} 1 & 201 = {}_{20} 1 \\
2 = {}_0 2 & 22 = {}_2 2 & 62 = {}_6 2 & 182 = {}_{18} 2 & 202 = {}_{20} 2 \\
\vdots \;\vdots\; \vdots & \vdots \;\vdots\; \vdots & \vdots \;\vdots\; \vdots & \vdots \;\vdots\; \vdots & \vdots \;\vdots\; \vdots \\
9 = {}_0 9 & 29 = {}_2 9 & 69 = {}_6 9 & 189 = {}_{18} 9 & 209 = {}_{20} 9
\end{array}$$

และ

$$\begin{array}{ccccc}
0 = {}_0 0 & -20 = {}_{-2} 0 & -60 = {}_{-6} 0 & -180 = {}_{-18} 0 & -200 = {}_{-20} 0 \\
-1 = {}_{-1} 9 & -21 = {}_{-3} 9 & -61 = {}_{-7} 9 & -181 = {}_{-19} 9 & -201 = {}_{-21} 9 \\
-2 = {}_{-1} 8 & -22 = {}_{-3} 8 & -62 = {}_{-7} 8 & -182 = {}_{-19} 8 & -202 = {}_{-21} 8 \\
\vdots \;\vdots\; \vdots & \vdots \;\vdots\; \vdots & \vdots \;\vdots\; \vdots & \vdots \;\vdots\; \vdots & \vdots \;\vdots\; \vdots \\
-9 = {}_{-1} 1 & -29 = {}_{-3} 1 & -69 = {}_{-7} 1 & -189 = {}_{-19} 1 & -209 = {}_{-21} 1
\end{array}$$

เพื่อความสะดวก ยังคงจะเขียน ${}_0 r$ ด้วย r สำหรับทุกจำนวนเต็ม r ซึ่ง $0 \leq r < 10$

บทนิยาม 1 (ณัฐวุฒิ และ อัยเรศ, 2556) กำหนดให้ ${}_z\mathrm{R}$ แทนเซตของจำนวนใน (I) ทั้งหมด นั่นคือ

$${}_z\mathrm{R} = \{ {}_q r \mid r, q \in \mathrm{z} \text{ และ } 0 \leq r < 10 \} \qquad \text{(II)}$$

และเราจะเรียกสมาชิกของ ${}_z\mathrm{R}$ ว่า ***จำนวนเศษเหลือ*** (remainder number)

เพื่อให้เข้าใจในผลลัพธ์ของการประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทจากบทความนี้ จะแนะนำการแปลงจำนวนเศษเหลือที่ได้จาก (I) กลับเป็นเลขฐานสิบปกติ เนื่องจากจำนวนเศษเหลือเป็นจำนวนที่เลขในแต่ละหลักอาจจะไม่ใช่เลขโดด ซึ่งมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับสิบ แต่จำนวนในระบบเลขฐานสิบเป็นจำนวนที่เลขในแต่ละหลักเป็นเลขโดด และจากหลักการบวกเลขปกติ หากผลบวกมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับสิบและเขียนเป็นจำนวนเศษเหลือ ${}_q r$ เมื่อ q คือผลหาร และ r คือเศษเหลือ (เลขโดด) จากการหารด้วยเลข 10 แล้วนำผลหาร q ไปทดที่หลักหน้า ฉะนั้นจึงสรุปเป็นวิธีการแปลงจำนวนเศษเหลือกลับเป็นเลขฐานสิบปกติได้โดยการบวกทแยงจากเศษเหลือตัวขวากับผลหารตัวซ้าย ซึ่งก็คือการทดเลขปกตินั่นเอง เพื่อให้เข้าใจได้ง่ายขอยกตัวอย่างการแปลงจำนวน $21103_8 2412_{11} 1_{28} 241134$ ที่ได้จากการเรียงกันของจำนวนเศษเหลือกลับเป็นเลขฐานสิบ ดังนี้

$$\begin{aligned}
21103_8 2412_{11} 1_{28} 241134 &= 2110(3+8)241(2+11)(1+28)241134 \\
&= 22110(11)241(13)(29)241134 \\
&= 2110_1 1241_1 3_2 9241134 \\
&= 211(0+1)124(1+1)(3+2)9241134 \\
&= 2111124259241134
\end{aligned}$$

ผลการศึกษาหลัก

จากการสังเกตลักษณะทางพีชคณิตบางอย่างของจำนวนหลายหลักที่ประกอบด้วยเลขโดด 0 , 1 และ 9 ทำให้เราพบความสัมพันธ์ และสามารถหาคำตอบที่มีลักษณะน่าสนใจ ดังนี้

$$
\begin{array}{rcccc}
[11\times 9090] & + & 11 & = & 100001 \\
[111\times 900900] & + & 101 & = & 100000001 \\
[1111\times 90009000] & + & 1001 & = & 100000000001 \\
[11111\times 9000090000] & + & 10001 & = & 100000000000001 \\
[111111\times 900000900000] & + & 100001 & = & 100000000000000001 \\
[1111111\times 90000009000000] & + & 1000001 & = & 100000000000000000001 \\
[11111111\times 9000000090000000] & + & 10000001 & = & 100000000000000000000001 \\
[111111111\times 900000000900000000] & + & 100000001 & = & 100000000000000000000000001
\end{array} \quad \text{(III)}
$$

จากความสัมพันธ์ใน (III) เราสังเกตเห็นว่าผลบวกนี้เป็นจำนวนหลายหลัก โดยที่หลักแรกและหลักสุดท้ายเป็นเลขโดด 1 และหลักที่เหลือเป็นเลขโดด 0 ทั้งหมด จำนวนเท่ากับ $3 \cdot n - 2$ หลัก เมื่อ n เป็นจำนวนหลักของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 1 และ $1 \le n \le 9$ ฉะนั้นเราสามารถเขียนในรูปทั่วไปจากข้อสังเกตนี้ได้ดังนี้

$$(\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n}\times 9\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n-1}9\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n-1})+1\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n-2}1=1\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=3\cdot n-2}1 \text{ สำหรับจำนวนเต็มบวก } n\le 9$$

ฉะนั้น จาก (III) เราจึงสรุปเป็นข้อสงสัยได้ดังต่อไปนี้

(1) เราสามารถเขียนรูปทั่วไปที่แน่นอนของผลบวกนี้ได้หรือไม่

(2) หากเราสามารถเขียนรูปทั่วไปที่แน่นอนของผลบวกนี้ได้แล้วรูปทั่วไปของผลบวกนี้จะมีลักษณะเหมือนกับข้อสังเกต (III) ที่เราพบหรือไม่

ทั้งนี้ผู้เขียนมีข้อสงสัยว่า หากในขณะที่เรากำลังจะคิดหาคำตอบของผลบวกใน (III) โดยไม่มีเครื่องมือที่เป็นตัวช่วยในการคำนวณ เช่น เครื่องคิดเลข หรือค่าคำตอบมีจำนวนหลักมากกว่าจำนวนหลักที่เครื่องคิดเลขประมวลผลได้ แล้วเราจะมีวิธีขจัดปัญหานี้ได้อย่างไร เราสามารถสร้างเครื่องมือที่มาเป็นตัวช่วยในการหาคำตอบ หรือเป็นเครื่องทุ่นแรงได้หรือไม่และเหตุทั้งหมดนี้ จึงเกิดการศึกษาและหาเครื่องมือที่เราต้องการตามมา โดยใช้ความสัมพันธ์ทางพีชคณิตข้างต้นมาศึกษา ดังต่อไปนี้

บทตั้ง 1 สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \ge 1$ จะได้ว่า

$$\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n}\times 9\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n-1}9\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n-1}=\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=2\cdot n}\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n-1}$$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $P(n)$ แทนข้อความ

$$\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n}\times 9\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n-1}9\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n-1}=\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=2\cdot n}\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n-1}$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \ge 1$ จะได้ว่า

เนื่องจาก $1\times 99 = 99 = \underbrace{99}_{\#(9)=2\cdot1=2}$ เมื่อ

$\#(0) = 1 - 1 = 0$ กำหนดให้ $P(1)$ เป็นจริง สมมติว่า $P(k)$ เป็นจริง สำหรับจำนวนเต็มบวก k จะได้ว่า

$$\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=k}\times 9\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k-1}9\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k-1}=\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=2\cdot k}\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k-1}$$

ฉะนั้น

$$
\begin{aligned}
\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=k+1}\times 9\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k}9\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k} &= \underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=k+1}\times(9\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=2\cdot k+1}+9\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k}) \\
&= (\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=k+1}\times 9\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=2\cdot k+1})+(\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=k+1}\times 9\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k}) \\
&= \underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=k+1}\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=2\cdot k+1}+\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=k+1}\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k} \\
&= \underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=k+1}\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=k+1}\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k} \\
&= \underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=2\cdot(k+1)}\ \underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=(k+1)-1}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริงโดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า

$$\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n}\times 9\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n-1}9\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n-1}=\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=2\cdot n}\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n-1}$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n\geq 1$

ต่อไปเป็นตัวอย่างที่ได้ประยุกต์ใช้บทตั้ง 1 ซึ่งตัวอย่างนี้ไม่สามารถคำนวณได้ด้วยเครื่องคิดเลขทั่วไป

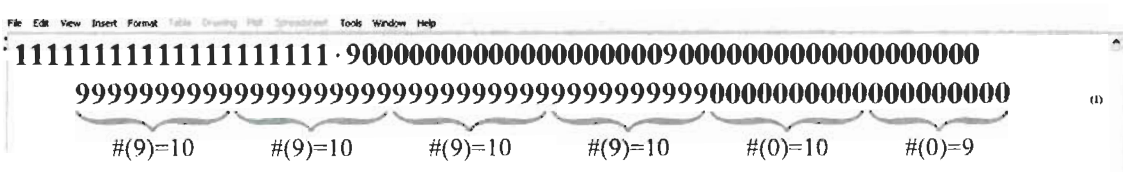
ตัวอย่าง 1 จงหาผลลัพธ์ของ

$$\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=20}\times 9\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=19}9\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=19}$$

วิธีทำ โดยบทตั้ง 1 จะได้ว่า

$$\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=20}\times 9\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=19}9\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=19}=\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=40}\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=19}$$

ตรวจคำตอบด้วยคอมพิวเตอร์



รูปที่ 1 : $\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=20}\times 9\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=19}9\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=19}$

จากบทตั้ง 1 นำไปสู่ทฤษฎีบทหลักได้ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3 สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n\geq 2$ จะได้ว่า

$$(\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n}\times 9\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n-1}9\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n-1})+1\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n-2}1=1\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=3\cdot n-2}1$$

การพิสูจน์ จากบทตั้ง 1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
(\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n}\times 9\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n-1}9\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n-1})+1\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n-2}1 &= \underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=2\cdot n}\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n-1}+1\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n-2}1 \quad \text{(บทตั้ง 1)}\\
&= \underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=2\cdot n-1}(10)\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n-2}1\\
&= \underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=2\cdot n-1}{}_{1}0\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n-2}1\\
&= \underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=2\cdot n-2}(9+1)0\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n-2}1\\
&= \underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=2\cdot n-2}{}_{1}00\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n-2}1\\
&\vdots\\
&= 1\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=2\cdot n}\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n-2}1\\
&= 1\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=3\cdot n-2}1
\end{aligned}$$

ฉะนั้น $(\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n}\times 9\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n-1}9\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n-1})+1\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n-2}1=1\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=3\cdot n-2}1$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n\geq 2$ □

ตัวอย่างต่อไปนี้ได้ประยุกต์ใช้ทฤษฎีบท 3 ในการหาคำตอบดังนี้

ตัวอย่าง 2 จงหาผลลัพธ์ของ

$$(\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=20}\times 9\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=19}9\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=19})+1\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=18}1$$

วิธีทำ โดยทฤษฎีบท 3 จะได้ว่า

$$(\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=20}\times 9\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=19}9\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=19})+1\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=18}1=1\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=58}1$$

ตรวจคำตอบด้วยคอมพิวเตอร์

File Edit View Insert Format Table Drawing Plot Spreadsheet Tools Window Help

$$(11111111111111111111 \cdot 9000000000000000000090000000000000000000) + 10000000000000000001$$

$$\underbrace{1000000000}_{\#(0)=10}\underbrace{0000000000}_{\#(0)=10}\underbrace{0000000000}_{\#(0)=10}\underbrace{0000000000}_{\#(0)=10}\underbrace{0000000000}_{\#(0)=10}\underbrace{000000001}_{\#(0)=8} \quad (1)$$

รูปที่ 2 : $(\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=20}\times 9\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=19}9\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=19})+1\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=18}1$

จากทฤษฎีบท 3 จะได้บทแทรก 1 ที่สำคัญ ดังนี้

บทแทรก 1 กำหนดให้ $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_m$ เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$k_1k_2k_3\ldots k_m \times [(\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n}\times 9\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n-1}9\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n-1})+1\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n-2}1] = {}_{k_1k_2k_3\ldots k_{m-1}}k_m\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=3\cdot n-2}{}_{k_1k_2k_3\ldots k_{m-1}}k_m$$

การพิสูจน์ จากทฤษฎีบท 3 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
k_1k_2k_3\ldots k_m\times[(\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n}\times9\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n-1}9\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n-1})+1\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n-2}1] &= k_1k_2k_3\ldots k_m\times1\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=3n-2}1 \\
&= \underbrace{1\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=3n-2}1+1\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=3n-2}1+\ldots+1\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=3n-2}1}_{\#(1\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=3n-2}1)=k_1k_2k_3\ldots k_m} \\
&= (k_1k_2k_3\ldots k_m)\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=3n-2}(k_1k_2k_3\ldots k_m) \\
&= {}_{k_1k_2k_3\ldots k_{m-1}}k_m\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=3\cdot n-2}{}_{k_1k_2k_3\ldots k_{m-1}}k_m
\end{aligned}$$

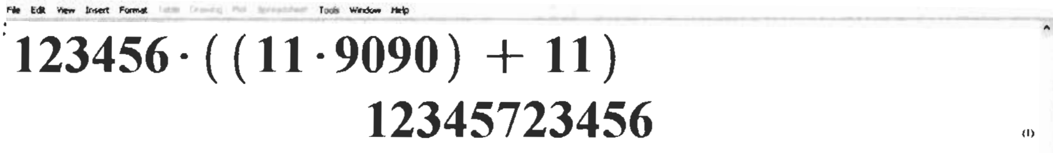
ต่อไปเป็นการแสดงตัวอย่างของการคำนวณเพื่อให้เกิดความกระจ่างในบทแทรก 1

ตัวอย่าง 3 จงหา $123456\times[(11\times9090)+11]$

วิธีทำ จากบทแทรก 1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
123456\times[(11\times9090)+11] &= 123456\times100001 \\
&= {}_{12345}6\times100001 \\
&= {}_{12345}60000{}_{12345}6 \\
&= {}_{12345}6000(0+12345)6 \\
&= {}_{12345}6000({}_{1234}5)6 \\
&= {}_{12345}600(0+1234)56 \\
&= {}_{12345}600{}_{123}456 \\
&= {}_{12345}60(0+123)456 \\
&= {}_{12345}60{}_{12}3456 \\
&= {}_{12345}6(0+12)3456 \\
&= {}_{12345}6{}_{1}23456 \\
&= {}_{12345}(6+1)23456 \\
&= 12345723456
\end{aligned}$$

ตรวจคำตอบด้วยคอมพิวเตอร์



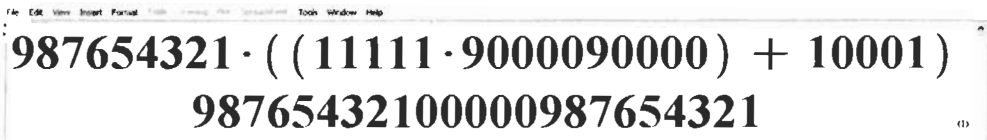
รูปที่ 3 : $123456\times[(11\times 9090)+11]$

ตัวอย่าง 4 จงหาผลลัพธ์ของ $987654321\times[(11111\times 9000090000)+10001]$

วิธีทำ จากทฤษฎีบท 3 และบทแทรก 1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}&987654321\times[(11111\times 9000090000)+10001]\\ &=987654321\times 100000000000001\\ &=\ _{98765432}1\times 100000000000001\\ &=\ _{98765432}100000000000000_{98765432}1\\ &=98765432100000987654321\end{aligned}$$

ตรวจคำตอบด้วยคอมพิวเตอร์



รูปที่ 4 : $987654321\times[(11111\times 9000090000)+10001]$

บทสรุป

จากการศึกษาผลบวกใน (III) โดยอาศัยจำนวนเศษเหลือและหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือที่สำคัญในการศึกษา ทำให้สามารถตอบข้อสงสัยทั้งสองข้อของเราได้ ดังนี้

(1) เราสามารถเขียนรูปทั่วไปที่แน่นอนของผลบวกนี้ได้ ซึ่งกล่าวไว้ในทฤษฎีบท 3 ดังนี้

$$(\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n}\times 9\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n-1}9\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n-1})+1\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n-2}1=1\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=3\cdot n-2}1$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n\geq 2$

(2) รูปทั่วไปของผลบวกนี้ที่ได้ตามทฤษฎีบท 3 นั้นสอดคล้องกับข้อสังเกตที่เราพบ

จากบทความนี้ เราสามารถหาคำตอบของผลบวกใน (III) ได้อย่างรวดเร็ว โดยไม่ต้องใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ หรือเครื่องคิดเลขในการช่วยหาคำตอบ เพียงเรามีเครื่องมือที่เหมาะสม นั่นคือบทตั้งและทฤษฎีบท รวมทั้งบทแทรกในบทความนี้ เพียงเท่านี้เราจึงขจัดปัญหาความยุ่งยากในการคำนวณหาคำตอบ อีกทั้งยังแสดงให้เห็นถึงความสวยงามของคำตอบและการพิสูจน์ในแบบคณิตศาสตร์อีกด้วย

กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอขอบพระคุณผู้ประเมินบทความวิชาการทุกท่าน สำหรับข้อคิดเห็นและข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์อย่างมากในการปรับปรุงบทความให้สำเร็จลุล่วงได้อย่างสมบูรณ์ โดยบทความนี้ได้รับการสนับสนุนจากกลุ่มวิจัย : Group for Young Algebraists in University of Phayao (GYA)

เอกสารอ้างอิง

ณัฐวุฒิ พลอาสา และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. (2556). ความสวยงามวางนัยทั่วไป : การเริ่มต้นของกรุปของจำนวนเศษเหลือ. **วารสารนเรศวรพะเยา,** 6(1) : 25-30.

รัตติญา บุญเรือง และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. (2556). ความสวยงามวางนัยทั่วไป : ผลคูณของจำนวน 12345679 กับจำนวนเต็มบวกที่เลข 9 หารลงตัว. **วารสารนเรศวรพะเยา,** 5(3) : 327-332.

อภิสิทธิ์ เมืองมา และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. (2556). ความสวยงามวางนัยทั่วไป : การนิยามจำนวนหลายหลักที่แต่ละหลักเป็นจำนวนเต็ม. **วารสารวิชาการ มหาวิทยาลัยราชภัฏอุตรดิตถ์,** 8(2) : 49-60.

อภิสิทธิ์ เมืองมา และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. (2556). ความสวยงามวางนัยทั่วไป : ผลคูณของจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นจากเลข 1 ไปทางซ้ายกับเลข 9. **วารสารวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยอุบลราชธานี,** 15(1). 75-83.

อัยเรศ เอี่ยมพันธ์ (2554). ความสวยงามวางนัยทั่วไป : การยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 1. **วารสารนเรศวรพะเยา,** 4(2) : 29-35.

อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. (2556). ความสวยงามวางนัยทั่วไป : จำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 1 และสมการเชิงเส้น. **วารสารวิทยาศาสตร์ มข,** 41(4) : อยู่ระหว่างการตีพิมพ์.

Clark, W. E. (2002). Elementary Number Theory. Department of Mathematics, University of South Florida.